www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

I. S. C. I. D. CONCOURS A 1989 Régime technologique

EPREUVE DE MATHEMATIQUES Durée : 4 heures Coefficient : 4

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

EXERCICE 1 :

Soient les matrices carrées d'ordre 2 :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1°) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $B^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

2°) a) Montrer que Q est inversible et calculer Q^{-1}

b) Calculer $Q^{-1} A Q$.

3°) En utilisant les deux questions précédentes, calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 1$. Vérifier qu'il existe λ réel et J matrice carrée d'ordre 2, indépendants de n, tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$A^n = \lambda^n(I + nJ)$$

EXERCICE 2 :

On considère une suite infinie de tirages à pile ou face mutuellement indépendants. A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est un nombre réel p fixé de $[0,1]$.

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire S_n :
S_n = nombre de "piles" obtenu au cours des n premiers tirages.

1°) a) Quelle est la loi de S_n ? Que valent son espérance et sa variance ?

b) En déduire : $E(S_n^2)$, $E\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right)$

Calculer : $\lim_{n \to +\infty} E\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right)$

2°) Soit $T_n = \exp\left(\frac{S_n}{n}\right)$ (ainsi T_n vaut $e^{\frac{k}{n}}$ lorsque S_n vaut k).

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$E(T_n) = \left(p\, e^{\frac{1}{n}} + 1 - p\right)^n$$

b) Montrer avec soin que : $\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = e^p$

(On étudiera d'abord $\lim_{n \to +\infty} \ln E(T_n)$).

c) On pose maintenant $E(T_n) - 1 = A_n(p)$ (p est toujours un réel de $[0,1]$).

Justifier que A_n est un polynôme de la variable p de degré n et une fonction strictement croissante sur $[0,1]$.

Tracer dans un même repère orthonormé (unité = 10 cm) les graphiques de A_1, A_2, A_3, exp.

TSVP

PROBLEME :

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n - \frac{U_n^3}{2} \end{cases}$

1°) Soit l'application f : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longmapsto X - \frac{X^3}{2}$

a) Déterminer les variations de f sur $[0,1]$.

b) Montrer que : . pour tout n entier, U_n appartient à $]0,1]$.
.. la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
... $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2°) On pose, pour tout X de $[0,1]$: $g(X) = \frac{1}{\sqrt{1+X}} - 1 + \frac{X}{2}$ et $h(X) = g(X) - \frac{3X^2}{8}$

a) Calculer g'(X), g''(X), h'(X), h''(X)
Etudier le signe de g''(X) et celui de h''(X), lorsque X appartient à $[0,1]$.

b) Déterminer les variations de g et h sur $[0,1]$ (graphiques non demandés)

c) A l'aide de b), montrer que pour tout X de $[0,1]$ on a les deux relations suivantes :

$$0 \leq g(X) \leq \frac{3X^2}{8} \quad , \quad \exists \varphi(X) \in \left[0, \frac{3X}{8}\right], \quad \frac{1}{\sqrt{1+X}} = 1 - \frac{X}{2} + X\varphi(X)$$

3°) a) Montrer que pour tout réel t de $[0,1]$, pour tout entier $n \geq 1$:

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n+1}} = \frac{t}{n\sqrt{n}}\left[\frac{1-t^2}{2} - \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$: $f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $f\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

c) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq U_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

4°) On pose : pour tout entier $n \geq 0$, $V_n = \frac{1}{U_{n+1}^2} - \frac{1}{U_n^2}$

pour tout entier $n \geq 1$, $W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V_k$

a) Exprimer V_n en fonction de U_n seulement. Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$.

b) En admettant que $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} V_n$, montrer que : $\lim_{n\to+\infty} nU_n^2 = 1$

Conclure que U_n admet un équivalent simple, à préciser, quand n tend vers $+\infty$

5°) a) Compléter le tableau suivant :

n	U_n	$\sqrt{n}\ U_n$
1	0,5	0,5
2	0,4375	0,61872
10		
25		
100		

(Les calculs seront effectués avec une calculatrice; on inscrira dans le tableau les valeurs arrondies à 10^{-5} près, au plus proche, des résultats affichés)

b) Donner une valeur de n pour laquelle : $U_n < \frac{1}{1000}$

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail